МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВОГО РЫНКА С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ

А.А. Бячкова
Б.И. Мызникова
Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь

В данной работе подход с точки зрения эконофизики применен для объяснения механизмов формирования цены на рынке. Нами рассмотрена модель, предложенная в [1;3], для описания взаимодействия агентов на рынке. Она основана на теории перколяции, геометрически описывающей фазовый переход второго рода в физических системах [7,10].

Элементы математической теории перколяции

p $*L$

Для понимания явления перколяции необходимо рассмотреть квадратную решетку размерностью ячеек, где каждая ячейка может находиться в одном из двух состояний: «занято» или «свободно». Каждая ячейка «занимается» случайным образом с вероятностью , независимо от состояния соседних ячеек.

p

Явление перколяции сопровождается образованием кластеров, т. е. групп объединенных ячеек решетки, связанных с ближайшими соседями по общей стороне ячейки. Данное определение соответствует пониманию кластера в рамках ячеечной перколяции. Размер кластера и количество кластеров в конкретной перколяционной конфигурации зависит от вероятности .

p $< p_c$

Основной задачей теории является поиск бесконечного кластера, то есть кластера, который протягивается от одной стороны решетки к противоположной. В условиях образования бесконечного кластера большинство занятых ячеек будет принадлежать к одному кластеру. Считается, что при существует один соединяющий кластер, а при нет ни одного соединяющего кластера, и все кластеры конечны [7]. Здесь – критическое значение вероятности , соответствующее возникновению бесконечного кластера.

Следует подчеркнуть, что характерной особенностью, присущей перколяции, является связность. Поскольку связность обнаруживает качественное изменение при конкретном значении некоторого параметра, который можно менять непрерывно, мы можем наблюдать, что переход из состояния, не содержащего соединяющий кластер, в состоянии с одним соединяющим кластером представляет собой фазовый перколяционный переход.

Получение основных эмпирических функций распределения искомых величин осуществляется с помощью метода Монте-Карло. Компьютерное моделирование играет в современной физике важную роль, и метод Монте-Карло является наиболее распространенным способом решения задач протекания.

В его основе лежит генерация случайных чисел. Происходит создание выборки, соответствующей решетке, состоящей из ячеек, которые случайным образом образуют кластеры. Каждая очередная смоделированная конфигурация является представителем множества вариантов. Таким образом, можно сказать, что чем больше различных вариантов заполнения решетки сгенерировано, тем более точные эмпирические результаты могут быть получены на выходе.

Постановка задачи и математическая формулировка модели

Рассмотрим применение теории перколяции к анализу ситуаций на финансовом рынке.

Будем считать, что некоторое количество агентов на рынке действуют согласно поведению и предпочтению своих коллег. Такое поведение агентов довольно просто объяснить с точки зрения психологии: человек в своей повседневной жизни, как правило, не существует абсолютно независимо от окружающих и поддается определенному влиянию. Такая корреляция приводит к образованию случайных кластеров, в нашем случае – групп трейдеров на финансовом рынке, которые предпочитают покупать и продавать одновременно.

$1 - p$ L

При моделировании формирование кластеров осуществляется следующим образом: происходит генерация перколяционной решетки размером ячеек, где каждая ячейка соответствует одному агенту на рассматриваемом нами рынке. Соответственно, - общее количество агентов, действующих на данном рынке. Каждая ячейка решетки считается занятой случайным образом с вероятностью или остается свободной с вероятностью соответственно. Соседствующие занятые ячейки формируют кластеры.

$1/2$ $2a$

Предполагается, что в рамках одной конфигурации каждый кластер агентов принимает решение покупать с вероятностью , продавать с вероятностью , а также не предпринимать никаких действий («спать») с вероятностью . В данной модели является мерой временного интервала между двумя итерациями. Параметр позволяет учитывать соответствие всех инвесторов одной итерационной временной единице: маленькое значение соответствует короткому промежутку времени, тогда как значения , близкие к максимуму, равному , говорят о длинном временном интервале [2;3].

s n_s

Изменение цены в определенный промежуток времени характеризуется разницей между спросом и предложением «продающих» и «покупающих» групп агентов. Обозначим через **количество** кластеров размера в общем количестве ячеек решетки. В общем виде величина изменения цены за одну итерацию определяется как

$$(t) = \sum_{buy} n_s s - \sum_{sell} n_s$$

.

Другими словами, общий объем спроса на рынке рассчитывается как количество всех агентов, которые совершили покупку за данный временной промежуток. Количество агентов, определяется как сумма всех агентов принадлежащих всем кластерам, которые приняли решение о покупке. Соответственно определяется размер предложения, т. е. сумма всех агентов, принадлежащих всем кластерам, которые приняли решение продавать.

n_s $\Delta)$

Таким образом, для каждого временного шага очень важно проанализировать существующие кластеры и найти число кластеров , которые включают по агентов каждый. Распределение зависит от распределения величины – размеров кластеров. В свою очередь распределение подчиняется степенному закону:

$$n_s \propto s^{-\tau} f[(p - p_s)s^{\sigma}]$$

,

f τ

где – параметры распределения, а функция ведет себя экспоненциально. Данный закон распределения позволяет получать значения параметров модели, которые находятся в тесной взаимосвязи друг с другом.

p p_c

Наиболее важным для нас является анализ поведения агентов при наступлении порога перколяции, а также изменение цены в этот критический момент. Это объясняется следующим рыночным механизмом: при происходит рост цены, и в данных условиях агенты входят на рынок. Вследствие этого растет показатель , однако рост происходит до наступления краха рынка при . Происходит резкое падение цены, агенты несут потери и уходят с рынка, вследствие чего понижается показатель , и процесс роста цен начинается заново. Крах рынка при появлении на решетке бесконечного кластера объясняется тем, что подавляющая для данного рынка часть агентов имеет схожее мнение насчет своих действий. Это ведет к массовой продаже и покупке, которая в свою очередь приводит к кризису на рынке [3].

Δ

Таким образом, основным предназначением перколяционного подхода является получение – порога протекания решетки, характеризующего пороговую вероятность наступления краха рынка, а также получение эмпирического распределения показателя изменения цены на данном рынке в ситуации краха.

Результаты моделирования

Для достижения поставленной цели использован метод статистических испытаний (Монте-Карло). Алгоритм этого метода реализован на языке программирования R, который достаточно удобен для статистического анализа данных и работы с графикой. После применения алгоритма моделирования результаты были проанализированы в пакете MSExcel.

$= 0{,}5938003$

Рассмотрим полученные результаты, относящиеся к нахождению порога протекания . Выборочное среднее значение равно , медиана равна 0,593359375. Как можно заметить, она достаточно близка к значению среднего арифметического, что говорит о симметричности распределения данной случайной величины. Мода нашей выборки равна 0,582519531.

На рис. 1 представлена гистограмма частот. Визуально функция распределения случайной величины напоминает нормальное распределение. Наблюдается частое попадание в центральные интервалы, совпадение среднего арифметического и медианы доказывается симметричностью распределения. Однако коэффициент асимметрии – 0,081358436 свидетельствует о небольшом смещении вершины влево, а коэффициент эксцесса – 0,063011943 – о небольшой приплюснутости функции.

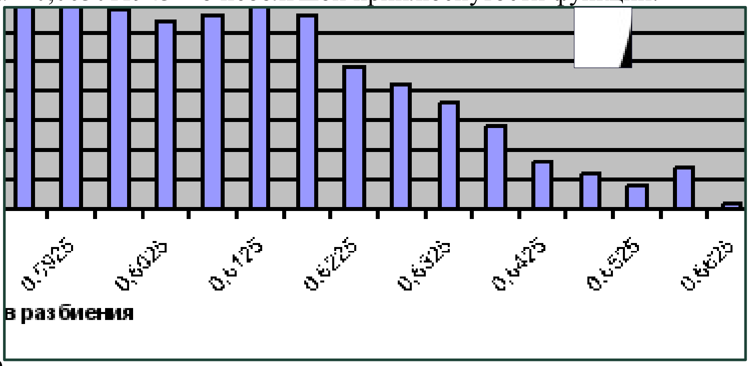

Рис. 1. Гистограмма частот распределения

p_c

Графическое отображение эмпирической функции распределения величины приведено на рис. 2.

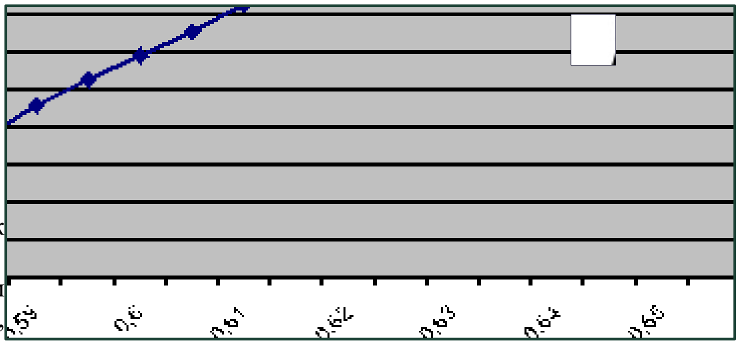

Рис. 2. Эмпирическая функция распределения

Δ

Далее обратимся к полученным модельным значениям величины обозначающей изменение цены на актив в течение одной итерации.

$\bar{\Delta}$

Выборочное среднее значение равно 233,27, мода равна 506, медиана 356,5.

Δ

Следует заметить, что медиана, мода и среднее арифметическое не совпадают, что можно наблюдать и на графиках (см. рис. 3). Таким образом, распределение не является симметричным. Высокое стандартное отклонение, равное 832,7530853, доказывает гипотезу о сильном разбросе данных относительно среднего значения. Полученная гистограмма частот случайной величины и вид эмпирической функции распределения представлены на рис. 3 и 4 соответственно.

Δ

Рис. 3. Гистограмма частот случайной величины

Δ

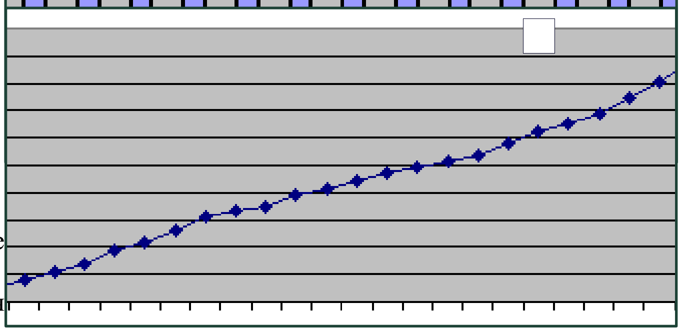

Рис. 4. Эмпирической функции распределения

В результате исследования зависимости значения порога протекания от количества ячеек в решетке или, что эквивалентно, количества агентов на рынке, получены значения, которые изображены на рис. 5.

Рис. 5. Зависимость порога протекания от количества агентов

$$p_c = 0,5991 - 0,3731 * N^{-1,131}$$

Данные подтверждают гипотезу о том, что при увеличении количества агентов значение порога протекания стремится к величине . С помощью оценок метода наименьших квадратов были получены коэффициенты, моделирующие значения порога протекания. Обозначим через общее количество ячеек в моделируемой решетке. В результате получена зависимость вида .

Заключение

В заключении скажем, что выполненное исследование позволяет использовать подход на основе теории перколяции для моделирования кризисных явлений на финансовых рынках. Существует множество интересных путей для продолжения данного исследования и введения модификаций модели.

Список литературы

1. Bouchaud J.-P. An introduction to statistical finance// Physica A. 2002. № 313. P.238-251.
2. Chang I., Stauffer D., Pandey R.B. Asymmetries, correlations and fat tails in percolation market model// International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2002. Vol.5, №. 6. –P.585-597.
3. Stauffer D. Percolation models of financial market dynamics// Advances in Complex Systems. 2001. Vol.4, №.1. –P. 19-27.
4. Stauffer D., Sornette D. Self-organized percolation model for stock market fluctuation// Physica A. 1999. № 271.–P. 496-506.
5. Sornette D., Stauffer D., Takayasu H. Market Fluctuation II: multiplicative and percolation models, size effects and prediction// arXiv:cond-math/9909439. 1999. Vo1. 30.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. 624 с.
7. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: в 2 частях. Часть 2/ Х. Гулд, Я. Тобочник, пер. с англ. В.А. Панченко, А.Н. Полюдов, – М.: Мир, 1990. 400 с.
8. А.В. Каплан, Каплан В.Е., Мащенко М.В., Овечкина Е.В. Решение экономических задач на компьютере /– М.:ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2004. 600 с.
9. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б. Сравнительный анализ проверки отклонения распределения от нормального закона// Метрология. №2. 2005. С.3-23.
10. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 176с.
11. Ивлиев С.В. Исследование кредитного риска методом Монте-Карло.[Электронный ресурс]. URL:www.riskland.ru/CreditRiskMonteCarlo.shtml